Learning Temple
IIT/NEET ACADEMY

9^{th} January 2020 _ SHIFT - 1

MATHEMATICS

1. The number of real roots of the equation, $e^{4x}+e^{3x}-4e^{2x}+e^{x}+1=0$ is:

समीकरण $e^{4x}+e^{3x}-4e^{2x}+e^{x}+1=0$ के वास्तविक मूलों की संख्या है :

(1) 1 (2) 3 (3) 4 (4) 2

Sol. **1**

let $e^x = t$

$=t^4+t^3-4t^2+t+1=0$

$=\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+\left(t+\frac{1}{t}\right)-4=0$

$=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2+\left(t+\frac{1}{t}\right)-6=0$

$\Rightarrow u^2+u-6=0$

$\Rightarrow (u+3)(u-2)=0$

$t+\frac{1}{t}-2=0$; $t+\frac{1}{t}+3=0$ (Not possible)

$\Rightarrow t^2-2t+1=0$

$\Rightarrow t=1$

$\Rightarrow e^x=1$

$\Rightarrow x=0$

2. Negation of the statement :

$\sqrt{5}$ is an integer or 5 is irrational is :

(1) $\sqrt{5}$ is an integer and 5 is irrational.

(2) $\sqrt{5}$ is not an integer and 5 is not irrational.

(3) $\sqrt{5}$ is not an integer or 5 is not irrational.

(4) $\sqrt{5}$ is irrational or 5 is an integer.

कथन, $\sqrt{5}$ एक पूर्णांक है या अपरिमेय है' का निषेधन है :

(1) $\sqrt{5}$ एक पूर्णांक नहीं है या 5 अपरिमेय नहीं है।

(2) $\sqrt{5}$ एक पूर्णांक नहीं है या 5 अपरिमेय नहीं है।

(3) $\sqrt{5}$ एक पूर्णांक है और 5 अपरिमेय है।

(4) $\sqrt{5}$ अपरिमेय है या 5 एक पूर्णांक है।

Sol. **2**

$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$

3. The value of $\int_0^{2\pi} \frac{x\sin^8 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$ is euqal

$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin^8 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$ का मान है :

(1) 4π (2) $2\pi^2$ (3) 2π (4) π^2

Sol. **4**

$$I=\int_0^{2\pi} \frac{x\sin^8 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx \quad ....(1)$$

$$I=\int_0^{2\pi} \frac{(2\pi-x)\sin^8 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx \quad ....(2)$$

On adding eq. 1 & 2

$$2I=2\pi\int_0^{2\pi} \frac{\sin^8 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$$

$$I=4\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^8 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx \quad ....(3)$$

$$I=4\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^8 x}{\cos^8 x+\sin^8 x}dx \quad ....(4)$$

On adding eq. 3 and 4

$$\Rightarrow 2I=4\pi\int_0^{\pi/2} 1.dx$$

4. The value of

$\cos^3\left(\frac{\pi}{8}\right).\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^3\left(\frac{\pi}{8}\right).\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ is :

$\cos^3\left(\frac{\pi}{8}\right).\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^3\left(\frac{\pi}{8}\right).\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ का मान है :

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Sol. **4**

$$=\cos^3\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}+\sin^3\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{8}\times\cos\frac{\pi}{8}\right)\times 1$$

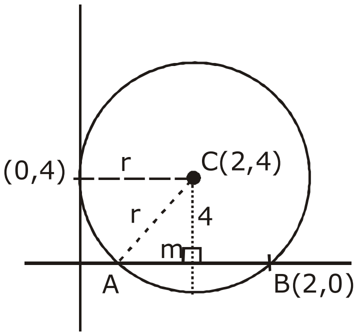
$$=\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

5. A circle touches the y-axis at the point (0,4) and passes through the point (2,0). Which of the following lines is not a tangent to this circle ?

एक वत्त y-अक्ष को बिन्दु (0, 4) पर स्पर्श करता है तथा बिन्दु (2, 0) से होकर जाता है। निम्न में से कौन सी रेखा इस वत्त की स्पर्श रेखा नहीं है ?

(1) 3x-4y-24 = 0 (2) 4x - 3y + 17 = 0 (3) 3x + 4y - 6 = 0 (4) 4x +3y -8 = 0

Sol. **4**



$x^2+(y-4)^2+\lambda x=0$

Passes through $(2,0)$

$4+16+2\lambda=0$

$\lambda=-10$

$x^2+y^2-8x+16-10x=0$

$C(5,4),\quad r=\sqrt{25+16+-16}\ =5$

Option(1) $\quad p=\dfrac{|15-16-24|}{5}=5$

Option(2) $\quad p=\dfrac{|20-12+17|}{5}=5$

Option(3) $\quad p=\dfrac{|15+16-6|}{5}=5$

Option(4) $\quad p=\dfrac{|20+12-8|}{5}\neq 5$

6. Let z be a complex number such that

$\left|\dfrac{z-i}{z+2i}\right|=1$ and $|z|=\dfrac{5}{2}$. Then the value of $|z+3i|$ is :

माना z एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है, कि $\left|\dfrac{z-i}{z+2i}\right|=1$ है तथा $|z|=\dfrac{5}{2}$ है, तो $|z+3i|$ का मान है :

(1) $\dfrac{7}{2}$ (2) $\dfrac{15}{4}$ (3) $2\sqrt{3}$ (4) $\sqrt{10}$

Sol. **1**

$=\left|\dfrac{z-i}{z+2i}\right| \quad =1 \quad ,|z|=\dfrac{5}{2}\ \Rightarrow x^2+(y-1)^2=x^2+(y+2)^2$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ ...(1) $\Rightarrow |z| = \frac{5}{2}$

$x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

from eq. (1)

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

$z = \sqrt{6} - \frac{i}{2}$ or $-\sqrt{6} - \frac{i}{2}$

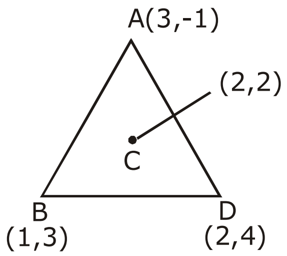
$|z + 3i| = \left|\sqrt{6} - \frac{i}{2} + 3i\right|$ or $\left|-\sqrt{6} - \frac{i}{2} + 3i\right|$ $\Rightarrow \sqrt{6 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$

7. Let C be the centroid of the triangle with vertices (3, -1), (1,3) and (2,4). Let P be the point of intersection of the lines x + 3y -1 = 0 and 3x-y+1 = 0.Then the line passing through the points C and P also passes through the point.

माना शीर्षो (3, -1), (1,3) तथा (2,4) वाले त्रिभुज का केन्द्रक C है। माना रेखाओं x + 3y -1 = 0 तथा 3x-y+1 = 0 का प्रतिच्छेदन बिन्दु P है, तो बिन्दुओं C तथा P से गुजरने वाली रेखा, निम्न में से किस बिन्दु से भी गुजरती है?

(1) (-9, -7) (2) (9,7) (3) (7,6) (4) (-9, -6)

Sol. **4**



$P: x + 3y - 1 = 0$ ...(1)

$3x - y + 1 = 0$ ....(2)

On solving eq.(1) and (2)

$x = -\frac{1}{5}, y = \frac{2}{5}$

eq. of line CP :

$= y - 2 = \left(\frac{\frac{2}{5} - 2}{-\frac{1}{5} - 2}\right)(x - 2)$

$\Rightarrow 8x - 11y + 6 = 0$

8. If the number of five digit numbers with distinct digits and 2 at the 10^{th} place is 336k, then k is equal to :

यदि विभिन्न अंकों वाली पांच अंकों की संख्याओं, जिनका दहाई का अंक 2 है, की संख्या 336k है, तो k बराबर है :

(1) 4 (2) 6 (3) 8 (4) 7

Sol. **3**

8 8 7 1 6

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

(2)

$8 \times 8 \times 7 \times 6 = 336k$

$k = 8$

9. The integral $\int \frac{dx}{(x+4)^{8/7}(x-3)^{6/7}}$ is equal to : (where C is a constant of integration)

समाकल $\int \frac{dx}{(x+4)^{8/7}(x-3)^{6/7}}$ बराबर है : (जहाँ C एक समाकलन अचर है)

(1) $\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^{3/7}+C$ (2) $\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^{1/7}+C$ (3) $-\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^{-1/7}+C$ (4) $-\frac{1}{13}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^{-13/7}+C$

Sol. **2**

$$\int \frac{dx}{(x+4)^{\frac{8}{7}}(x-3)^{\frac{6}{7}}}$$

$$\int \frac{dx}{(x+4)^2\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^{6/7}}$$

Put $\frac{x-3}{x+4}=t^7$

$$\left(\frac{(x+4)-(x-3)}{(x+4)^2}\right)dx=7t^6dt$$

$$\frac{7}{(x+4)^2}dx=7t^6dt$$

$$\int \frac{t^6}{t^6}dt=\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^{\frac{1}{7}}+C$$

10. If $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(a+2)x+\sin x}{x} & ;x<0\\ b & ;x=0\\ \dfrac{(x+3x^2)^{1/3}-x^{1/3}}{x^{4/3}} & ;x>0\end{cases}$

is continuous at x = 0 , then a + 2b is equal to :

यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(a+2)x+\sin x}{x} & ;x<0\\ b & ;x=0\\ \dfrac{(x+3x^2)^{1/3}-x^{1/3}}{x^{4/3}} & ;x>0\end{cases}$

x = 0 पर संतत है, तो a + 2b का मान है :

(1) 1 (2) 0 (3) -1 (4) -2

Sol. **2**

$$f(0^-)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2)h+\sinh}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{(a+3)}{2}\right)h\ \cos\left(\frac{a+1}{2}\right)h}{\frac{(a+3)}{2}\times h}\times\frac{(a+3)}{2} = a + 3$$

$$=f(0^+)=\lim_{h\to 0}\frac{(h+3h^2)^{1/3}-h^{1/3}}{h^{4/3}}$$

$$= f(0^+)=\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h}=1$$

= a + 3 = 1 = b

a = -2 , b = 1

a + 2b = 0

11. The product

$2^{\frac{1}{4}}.4^{\frac{1}{16}}.8^{\frac{1}{48}}.16^{\frac{1}{128}}....\text{to}\,\infty$ is equal to :

गुणनफल $2^{\frac{1}{4}}.4^{\frac{1}{16}}.8^{\frac{1}{48}}.16^{\frac{1}{128}}....\infty$ तक बराबर है :

(1) $2^{\frac{1}{4}}$ (2) $2^{\frac{1}{2}}$ (3) 2 (4) 1

Sol. **2**

$= 2^{1/4} \,.\, 2^{1/8} \,.\, 2^{1/16} \,.\, 2^{1/32} \,......$

$= 2^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+.........} \quad = 2^{\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}} = 2^{1/2}$

12. If f'(x) = tan^{-1} (secx + tanx), $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, and f(0) = 0 , then f(1) is equal to :

यदि f'(x) = tan^{-1} (secx + tanx), $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ है तथा f(0) = 0 है, तो f(1) का मान है :

(1) $\frac{\pi+2}{4}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{\pi+1}{4}$ (4) $\frac{\pi-1}{4}$

Sol. **3**

$= f'(x) = \tan^{-1}\left[\frac{1+\sin x}{\cos x}\right]$

$= f'(x) = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]$

$= f'(x) = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2} \quad , \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} \\ 0 < \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$= f(x) = \frac{\pi x}{4} + \frac{x^2}{4} + C$

f(0) = 0 $\Rightarrow$ C = 0

$= f(x) = \frac{\pi x}{4} + \frac{x^2}{4} \quad = f(1) = \frac{\pi+1}{4}$

13. Let f be any function continuous on [a, b] and twice differentiable on (a,b). If for all $x \in (a,b), f'(x) > 0$ and f''(x) < 0, then for any $c \in (a,b), \frac{f(c)-f(a)}{f(b)-f(c)}$ is greater than :

माना f कोई फलन है जोकि [a, b] में संतत तथा (a, b) में दो बार अवकलनीय है। यदि सभी $x \in (a,b)$ के लिए $f'(x) > 0$ तथा f''(x) < 0 हैं, तो किसी भी $c \in (a,b)$ के लिए $\frac{f(c)-f(a)}{f(b)-f(c)}$ निम्न में से किससे बड़ा है ?

(1) $\frac{c-a}{b-c}$ (2) $\frac{b-c}{c-a}$ (3) $\frac{b+c}{b-a}$ (4) 1

Sol. **1**

$f'(x)>0$ & $f''(x)<0$

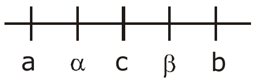
Apply LMVT on [a,c]

$$f'(\alpha)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

Apply LMVT on [c, b]

$$f'(\beta)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

f''(x) < 0 $\Rightarrow$ f'(x) is decreasing



$f'(\alpha) > f'(\beta)$

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

$$\frac{f(c)-f(a)}{f(b)-f(c)}>\frac{c-a}{b-c}$$

14. Let the observations $x_i(1\le i\le 10)$ satisfy the equations, $\sum_{i=1}^{10}(x_i-5)=10$ and $\sum_{i=1}^{10}(x_i-5)^2=40$. If μ and λ are the mean and the variance of the observations, x_1-3, x_2 - 3, ...x_{10}- 3, then the ordered pair (μ,λ) is equal to :

माना प्रेक्षण $x_i(1\le i\le 10)$ समीकरणों $\sum_{i=1}^{10}(x_i-5)=10$ तथा $\sum_{i=1}^{10}(x_i-5)^2=40$ को संतुष्ट करते हैं। यदि μ तथा λ, प्रेक्षणों x_1-3, x_2 - 3, ...x_{10}- 3 के क्रमशः माध्य तथा प्रसरण हैं, तो क्रमित युग्म (μ,λ) बराबर है :

(1) (3,3) (2) (3, 6) (3) (6,6) (4) (6,3)

Sol. **1**

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-5)=10$$

$$x_1+x_2+\ldots+x_{10}=10+50=60$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-5)^2=40$$

$$\left(x_1^2+x_2^2+\ldots..+x_{10}^2\right)+250-10(60)=40$$

$$x_1^2+\ldots.+x_{10}^2=640-250=390$$

$$\text{Mean}=\frac{x_1+\ldots\ldots+x_{10}-30}{10}$$

$$=\frac{60-30}{10}=3=\mu$$

$$\text{Variance} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\overline{x}\right)^2$$

$$=\frac{(x_1-3)^2+\ldots+(x_{10}-3)^2}{10}-3^2$$

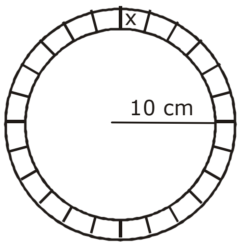
$$=\frac{390+90-6\times 60}{10}-3^2=3$$

15. A spherical iron ball of 10 cm radius is coated with a layer of ice of uniform thickness that melts at a rate of 50 cm^3 /min. When the thickness of ice is 5 cm, then the rate (in cm/min.) at which of the thickness of ice decreases, is :

एक 10 cm त्रिज्या वाली गोलाकार लोहे की गेंद को बर्फ की एक समान मोटाई वाली परत से लेप किया गया है, जो कि 50 cm^3 /min की दर से पिघलती है। जब बर्फ की परत की मोटाई 5 cm है, उस समय बर्फ की मोटाई के घटने की दर (cm/min में), है :

(1) $\frac{1}{18\pi}$ (2) $\frac{5}{6\pi}$ (3) $\frac{1}{36\pi}$ (4) $\frac{1}{54\pi}$

Sol. **1**



$$V=\frac{4}{3}\pi(r+x)^3$$

$$V=\frac{4}{3}\pi(10+x)^3$$

$$\frac{dv}{dt}=4\pi(10+x)^2\frac{dx}{dt}$$

$$50=4\pi(10+x)^2\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{50}{4\pi(15)^2}=\frac{50}{4\pi\times 15\times 15}=\frac{1}{18\pi}\text{cm/min}$$

16. If the matrices $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$, B = adj A and C = 3A , then $\frac{|adjB|}{|C|}$ is equal to :

यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$, B = adj A तथा C = 3A हैं, तो $\frac{|adjB|}{|C|}$ का मान है :

(1) 8 (2) 2 (3) 16 (4) 72

Sol. **1**

$$\frac{|adj(adjA)|}{|c|}=\frac{|A|^{(n-1)^2}}{|c|}$$

$$d=\frac{(6)^{(3-1)^2}}{3^3|A|}=\frac{6^4}{6\times 27}=8$$

17. If for all real triplets (a, b, c), f(x) = a + bx + cx² ; then $\int_0^1 f(x)dx$ is equal to :

यदि सभी वास्तविक त्रिकों (a, b, c) के लिए, f(x) = a + bx + cx² है, तो $\int_0^1 f(x)dx$ बराबर है :

(1) $2\left\{3f(1)+2f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ (2) $\frac{1}{2}\left\{f(1)+3f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ (3) $\frac{1}{3}\left\{f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ (4) $\frac{1}{6}\left\{f(0)+f(1)+4f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$

Sol. **4**

$$\Rightarrow \int_0^1 (a+bx+cx^2)dx$$

$$\left(ax+\frac{bx^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)_0^1$$

$a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}\Rightarrow\frac{6a+3b+2c}{6}$ Now f(1) = a + b + c

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}$$

$$f(0)=0$$

(A) 2{3(a+b+c) + 2a + b + c/2}
= 2{5a + 4b + 7c/2}

(B) $\frac{1}{2}\{a+b+c+3a+\frac{3b}{2}+\frac{3c}{4}\}$

$\frac{1}{2}\{4a+\frac{5b}{2}+\frac{7c}{4}\}$

(D) $\frac{1}{6}\left[a+a+b+c+4\left(a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}\right)\right]$

$\frac{1}{6}[6a+3b+2c]$

18. If e_1 and e_2 are the eccentricities of the ellipse, $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{4}=1$ and the hyperbola, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ respectively and (e_1, e_2) is a point on the ellipse, $15x^2 + 3y^2 = k$, then k is equal to :

यदि e_1 तथा e_2 क्रमशः दीर्घवत्त $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{4}=1$ तथा अतिपरवलय $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ की उत्केंद्रताएँ है तथा (e_1, e_2) दीर्घवत्त $15x^2 + 3y^2 = k$ पर स्थित एक बिन्दु है, तो k का मान है :

(1) 14 (2) 17 (3) 15 (4) 16

Sol. **4**

$e_1^2=1-\frac{4}{18}=\frac{7}{9}$

$= e_1=\frac{\sqrt{7}}{3}$ ....(1)

$= e_2=\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$ ....(2)

$\Rightarrow 15(e_1)^2+3(e_2)^2=k$

$\Rightarrow \quad 15\left(\frac{7}{9}\right)+3\left(\frac{13}{9}\right)=k$

$\Rightarrow \quad k=16$

19. In a box, there are 20 cards , out of which 10 are labelled as A and the remaining 10 are labelled as B. Cards are drawn at random one after the other and with replacement, till a second A-card is obtained. The probability that the second A-card appears before the third B-card is :

एक बक्से में 20 कार्ड हैं जिनमें से 10 पर A अंकित किया गया है तथा शेष 10 पर B अंकित किया गया है। बक्से में से यादच्छया एक के बाद एक (प्रतिस्थापना सहित) कार्ड तब तक निकाले गए जब तक कि दूसरा A से अंकित कार्ड न आ जाए। दूसरे A से अंकित कार्ड के तीसरे B से अंकित कार्ड से पहले आने की प्रायिकता है :

(1) $\frac{15}{16}$ (2) $\frac{11}{16}$ (3) $\frac{9}{16}$ (4) $\frac{13}{16}$

Sol. **2**

$R_{eq}=P(A\cap A)+P(A\cap B\cap A)+P(B\cap A\cap A)+P(B\cap B\cap A\cap A)+P(A\cap B\cap B\cap A)+P(B\cap A\cap B\cap A)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\times 3=\frac{11}{16}$

20. If for some α and β in R, the intersection of the following three planes

x + 4y - 2z = 1

x + 7y - 5z = β

x + 5y + αz = 5

is a line in R^3 , then $\alpha+\beta$ is euqal to :

यदि R में किन्हीं α तथा β के लिए, निम्न तीन समतलों

x + 4y - 2z = 1

x + 7y - 5z = β

x + 5y + αz = 5

का प्रतिच्छेदन, R^3 में एक रेखा है, तो $\alpha+\beta$ का मान है :

(1) 0 (2) -10 (3) 10 (4) 2

Sol. **3**

$\Delta=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \\ 1 & 5 & \alpha \end{vmatrix}=0$$

$1(7\alpha+25)-4(\alpha+5)-2(5-7)=0$

$7\alpha+25-4\alpha-20+4=0$

$3\alpha+9=0$

$\alpha=-3$

also,

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & \beta \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}=0$$

$=1(35-5\beta)-4(5-\beta)+(-2)=0$

$=13-\beta=0$

$\beta=13$

21. If the vectors, $\vec{p}=(a+1)\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}$, $\vec{q}=a\hat{i}+(a+1)\hat{j}+a\hat{k}$ and $\vec{r}=a\hat{i}+a\hat{j}+(a+1)\hat{k}$ $(a\in R)$ are coplanar and $3(\vec{p}.\vec{q})^2-\lambda|\vec{r}\times\vec{q}|^2=0$, then the value of λ is

यदि सदिश $\vec{p}=(a+1)\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}$, $\vec{q}=a\hat{i}+(a+1)\hat{j}+a\hat{k}$ तथा $\vec{r}=a\hat{i}+a\hat{j}+(a+1)\hat{k}$ $(a\in R)$ सहतलीय हैं तथा $3(\vec{p}.\vec{q})^2-\lambda|\vec{r}\times\vec{q}|^2=0$ है, तो λ का मान है............. ।

Sol. **1**

$$\left[\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}\right]=\begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & a+1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$1\ (a+1+a) + 1(a) = 0 \Rightarrow 3a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1/3$

$$\vec{p}=\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{-1}{3}\ ;\ \vec{q}=\frac{-1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\ ;\vec{r}=\frac{-1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}$$

$$\vec{p}.\vec{q}=-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=-\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{-1}{3}\ \Rightarrow\ \vec{r}\times\vec{q}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$= 3\times\frac{1}{9}-\lambda\left(\sqrt{\frac{3}{9}}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1$$

22. The coefficient of x^4 in the expansion of $(1+ x + x^2)^{10}$ is
$(1+ x + x^2)^{10}$ के प्रसार में x^4 का गुंणाक है .... ।

Sol. **615**

$$=\frac{10!}{p!q!r!}(1)^p(x)^q\left(x^2\right)^r$$

$$= q+2r=4,\ p+q+r=10$$

p	q	R
8	0	2
6	4	0
7	2	1

$$=\frac{10!}{8!2!}+\frac{10!}{6!4!}+\frac{10!}{7!2!}$$

$$= 45+210+360=615$$

23. If for $x\ge 0, y=y(x)$ is the solution of the differential equation, $(x+1)\,dy=\left((x+1)^2+y-3\right)dx\ ,y(2)=0,$, then y(3) is equal to.........

यदि $x\ge 0$ के लिए $y = y(x)$, अवकल समीकरण $(x+1)\,dy=\left((x+1)^2+y-3\right)dx\ ,y(2)=0,$ का हल है, तो y(3) का मान है ।

Sol. **3**

$(x+1)\,dy = \left[(x+1)^2 + (y-3)\right]dx$

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = x + 1 - \frac{3}{x+1}$

$\Rightarrow \ I.F. = e^{-\int \frac{dx}{x+1}} = \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow \ \frac{y}{x+1} = \int \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}dx$

$\Rightarrow \ \frac{y}{x+1} = x + \frac{3}{x+1} + C$

Equation passes through (2,0) then, C = -3

$= \ \frac{y}{x+1} = x + \frac{3}{x+1} - 3$

Put x = 3 then, y = 3

24. The number of distinct solutions of the equation, $\log_{\frac{1}{2}}|\sin x| = 2 - \log_{\frac{1}{2}}|\cos x|$ in the interval $[0, 2\pi]$ is ....

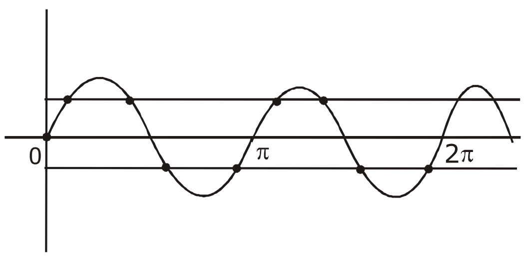
समीकरण $\log_{\frac{1}{2}}|\sin x| = 2 - \log_{\frac{1}{2}}|\cos x|$ के अंतराल $[0, 2\pi]$ में भिन्न हलों की संख्या है ....

Sol. **8**

$\log_{\frac{1}{2}}|\sin x| = 2 - \log_{\frac{1}{2}}|\cos x|$

$= \ |\sin x||\cos x| = \frac{1}{4}$

$= \ \sin 2x = \pm\frac{1}{2}$



25. The projection of the line segment joining the points (1, -1,3) and (2, -4, 11) on the line joining the points (-1,2,3) and (3, -2, 10) is ....

बिन्दुओं (1, -1,3) तथा (2, -4, 11) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का बिन्दुओं (-1,2,3) तथा (3, -2, 10) को मिलाने वाली रेखा पर प्रक्षेप है I

Sol. 8

$\vec{a} = 1, -3, 8$

$\vec{b} = 4, -4, 7$

$= \ \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{4+12+56}{\sqrt{16+16+49}} = 8$